Conformalidade

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Definição: Diz-se que uma aplicação é **conforme** num ponto do seu domínio, se preserva ângulos e orientações entre vectores tangentes, nesse ponto.

Teorema: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathrm{int} D_f$. Então, se $f'(z_0) \neq 0$, f é conforme em z_0.

Teorema (Função Inversa): Seja $\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) \in \text{int}D_{\mathbf{f}}$. Então, se o jacobiano de $\mathbf{f}$ em (x_0, y_0) for não nulo, $J\mathbf{f}(x_0, y_0) = \det D\mathbf{f}(x_0, y_0) \neq 0$, tem-se que

- existe uma vizinhança aberta $U_{(x_0,y_0)}$ de (x_0, y_0) e uma vizinhança aberta $V_{\mathbf{f}(x_0,y_0)}$ de $\mathbf{f}(x_0, y_0)$ tal que $\mathbf{f} : U_{(x_0,y_0)} \to V_{\mathbf{f}(x_0,y_0)}$ é uma bijecção

- a inversa $\mathbf{f}^{-1} : V_{\mathbf{f}(x_0,y_0)} \to U_{(x_0,y_0)}$ é diferenciável (no sentido de $\mathbb{R}^2$) em $\mathbf{f}(x_0, y_0)$

- a matriz jacobiana da inversa $\mathbf{f}^{-1}$ em $\mathbf{f}(x_0, y_0)$ é dada pela inversa da matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ em (x_0, y_0)

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x_0, y_0)) = \Big(D\mathbf{f}(x_0, y_0)\Big)^{-1}.$$

Teorema (Função Inversa Complexa): Seja $f : D_{\mathbf{f}} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no ponto $z_0 = x_0 + i\, y_0 \in \text{int} D_f$. Então, se $f'(z_0) \neq 0$ tem-se

- existe uma vizinhança aberta U_{z_0} de z_0 e uma vizinhança aberta V_{w_0} de $w_0 = f(z_0)$ tal que $f : U_{z_0} \to V_{w_0}$ é uma bijecção
- a inversa $f^{-1} : V_{w_0} \to U_{z_0}$ é diferenciável (no sentido complexo) em $w_0 = f(z_0)$
- a derivada da inversa f^{-1} em $w_0 = f(z_0)$ é dada pelo (número) inverso de $f'(z_0)$

$$(f^{-1})'(w_0) = (f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Proposição: Qualquer ramo do logoritmo complexo $\log_{\mathbb{C}} z = \log_{\mathbb{R}} |z| + i\, \text{Arg} z$, com $\text{Arg} z \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ é diferenciável complexo em $z \neq 0$ e $\text{Arg} z \neq \theta$ com

$$\log' z = \frac{1}{z}.$$

Proposição: Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfa no ponto $z_0 = x_o + iy_0$, com $f'(z_0) \neq 0$. Então, as curvas de nível

$$u(x, y) = c_1 = \text{Re}(f(z_0)) \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = c_2 = \text{Im}(f(z_0))$$

que passam no ponto z_0, cruzam-se ortogonalmente nesse ponto.

Integração Complexa

Definição: Um **caminho** ou **parametrização duma curva** em $\mathbb{C}$ é uma aplicação contínua $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

- Diz-se que é um **caminho fechado** se as imagens dos pontos inicial e final são as mesmas, ou seja, se $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.
- Diz-se que é um **caminho simples** se γ é injectiva (ou seja, que as suas imagens não se auto-intersectam), exceptuando possivelmente apenas os extremos, no caso de ser fechado.
- Diz-se que é um **caminho regular** se $\gamma \in C^1[t_0, t_1]$. E diz-se que é um **caminho seccionalmente regular** se é possível encontrar uma partição finita $t_0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = t_1$ tal que $\gamma \in C^1[s_j, s_{j+1}]$ para todo o $j = 0, \ldots, n-1$.

Chama-se **curva** em $\mathbb{C}$ ao contradomíno dum caminho $\gamma([t_0, t_1])$. Uma curva diz-se fechada, simples ou regular, se existem caminhos com essas propriedades que a parametrizam. Uma curva simples e fechada designa-se por **curva de Jordan**.

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua sobre os pontos duma curva $C \subset D_f$ a qual é parametrizada por um caminho seccionalmente regular $\gamma : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, com $C = \gamma([t_0, t_1])$. Então, define-se o **integral de f ao longo de γ**, e representa-se por $\int_\gamma f(z)dz$, ou mais simplesmente $\int_\gamma f$, como

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemplos:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\, dz = 0$$

Proposição: Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções contínuas, $a, b \in \mathbb{C}$ constantes, e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ parametrizações seccionalmente regulares de curvas em Ω. Então, tem-se

- $\displaystyle\int_\gamma (af + bg) = a \int_\gamma f + b \int_\gamma g.$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$ ($-\gamma$ designa a parametrização em sentido inverso de γ).
- $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$ ($\gamma_1 + \gamma_2$ designa a concatenação dos caminhos γ_1 e γ_2).

Proposição: Um caminho $\tilde{\gamma} : [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}] \to \mathbb{C}$ diz-se uma **reparametrização** da curva parametrizada por $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ se existe uma aplicação de classe C^1 $\alpha : [t_0, t_1] \to [\tilde{t_0}, \tilde{t_1}]$, com $\alpha'(t) > 0$ para todo o t, e $\alpha(t_0) = \tilde{t_0}$, $\alpha(t_1) = \tilde{t_1}$, tal que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$. Nesse caso, dada uma função contínua f nos pontos da curva, tem-se

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

Proposição: Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua nos pontos duma curva em D_f parametrizada por um caminho seccionalmente regular γ. Então, tem-se

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \sup_t |f(\gamma(t))|,$$

onde $L(\gamma)$ designa o comprimento percorrido pela parametrização γ e dado por $\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$.